Věta 43 doplnění Dk: (i) $\Leftrightarrow$ (iv)

($\Rightarrow$) nechť $A \subseteq M$ je uzavřená. Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ je konvergentní posloupnost s limitou $x := \lim_{n \to \infty} x_n$.

nechť (pro spor) $x \notin A$.

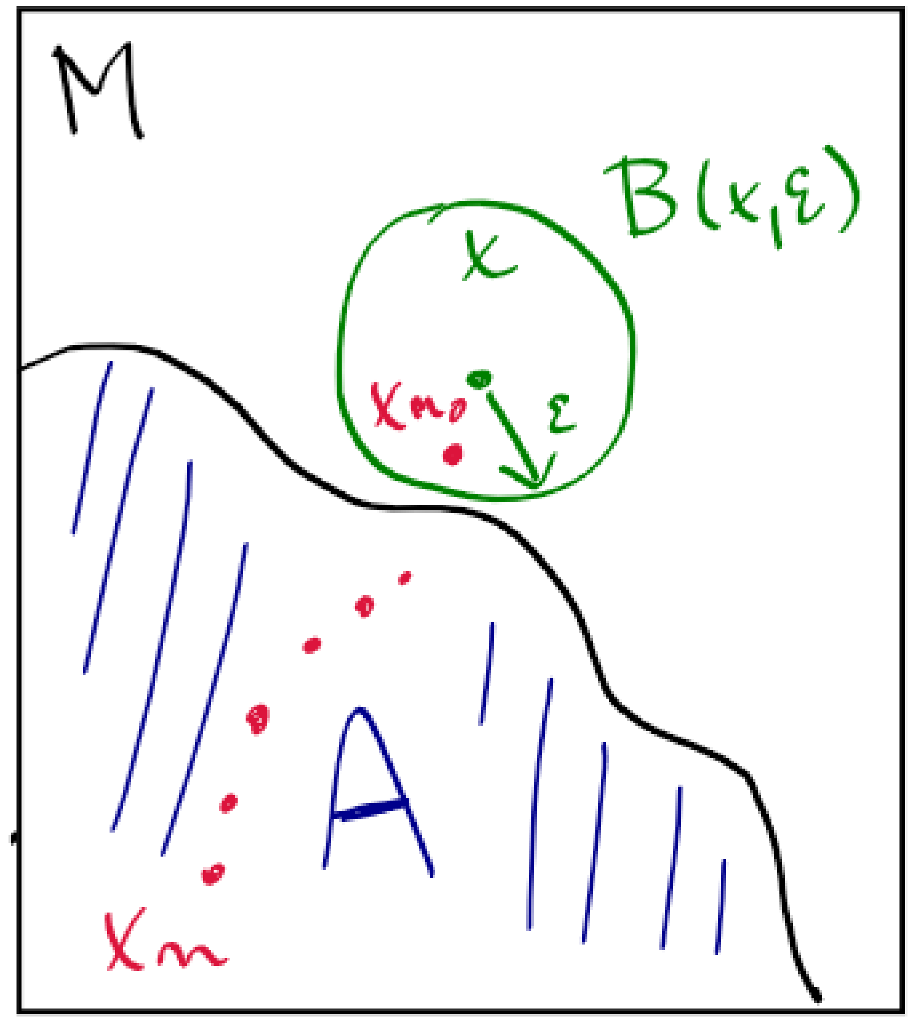
Tj. $x \in A^c$. Ale my víme, že A^c je otevřená (A je uz.)

Tedy $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq A^c$.

Ale podle definice $\lim x_n = x$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : x_n \in B(x, \varepsilon)$.

Speciálně $x_{n_0} \in B(x, \varepsilon) \subseteq A^c$, a tedy $x_{n_0} \notin A$. Spor $\lightning$.



($\Leftarrow$) nechť A není uz. Chceme: $\neg$(iv)

neboli Chceme: $\exists \{x_n\} \subset A : \lim x_n \notin A$.

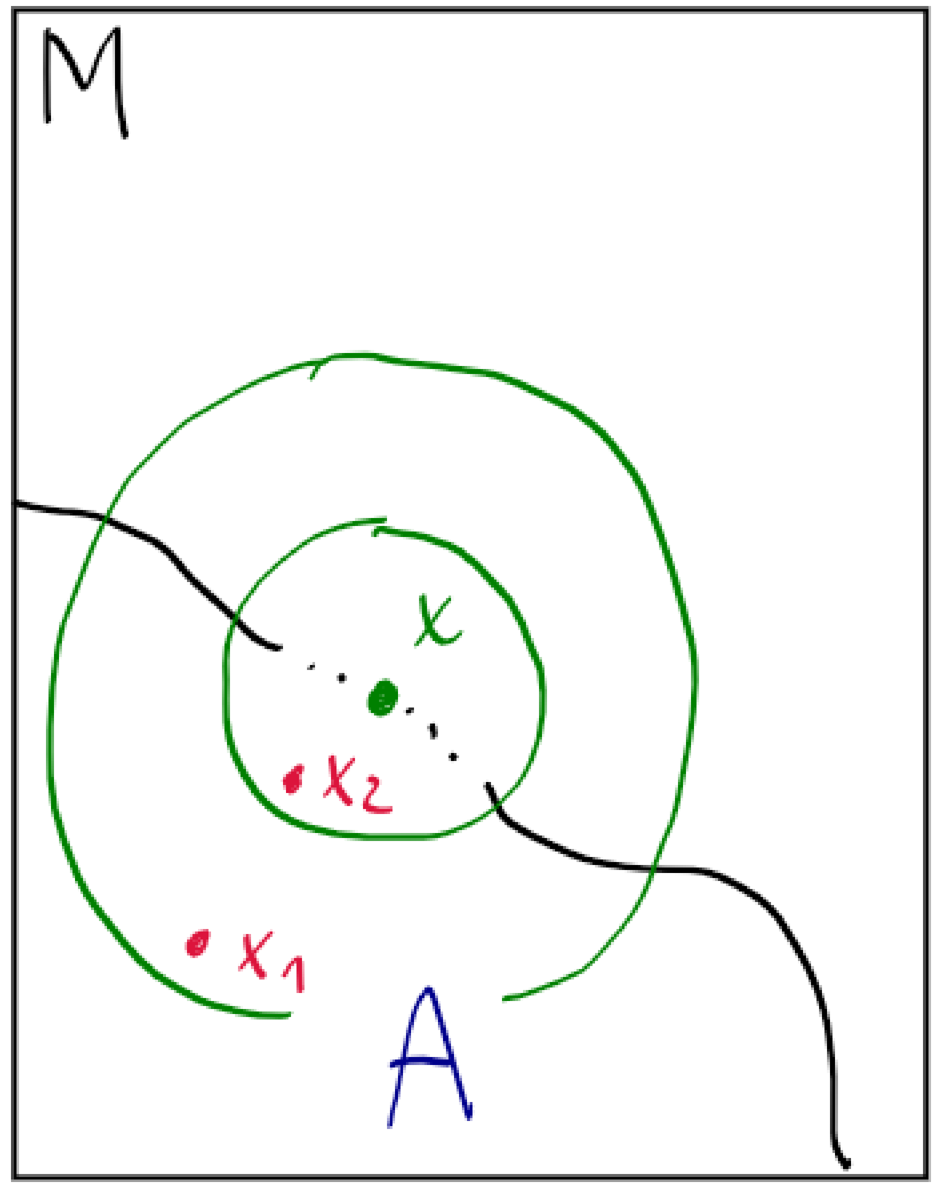
A není uz. $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} H(A) \notin A$, tj.

$\exists x \in H(A) \setminus A$.

$x \in H(A) \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$

$\forall \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset\ \wedge$

$\wedge\ B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$.



Tedy rekurzí pro $\varepsilon = \frac{1}{n}$

$\rightsquigarrow x_n : \quad x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A, \quad n \in \mathbb{N}$

Tedy $\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{0} \leq \underbrace{\rho(x, x_n)}_{\to 0} < \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}$

LO2P

Tj. $x_n \to x$.

$\{x_n\} \subseteq A$, $x \notin A$. $\boxtimes$

<u>Věta 49</u>: $f: M \to \mathbb{R}$ (obecněji $f: M \to N$)

NVJE: (i) f je spojitá na M

(ii) $\forall G \subseteq \mathbb{R}$ (resp. $G \subseteq N$) ot.: $f^{-1}(G)$ je ot.

(iii) $\forall F \subseteq \mathbb{R}$ (resp. $F \subseteq N$) uz.: $f^{-1}(F)$ je uz.

<u>Důkaz</u>: <u>(i) $\Rightarrow$ (ii)</u>: nechť f je spoj.,

nechť je dána $G \subseteq \mathbb{R}$ ot. <u>Chceme</u>: $f^{-1}(G)$ je ot.

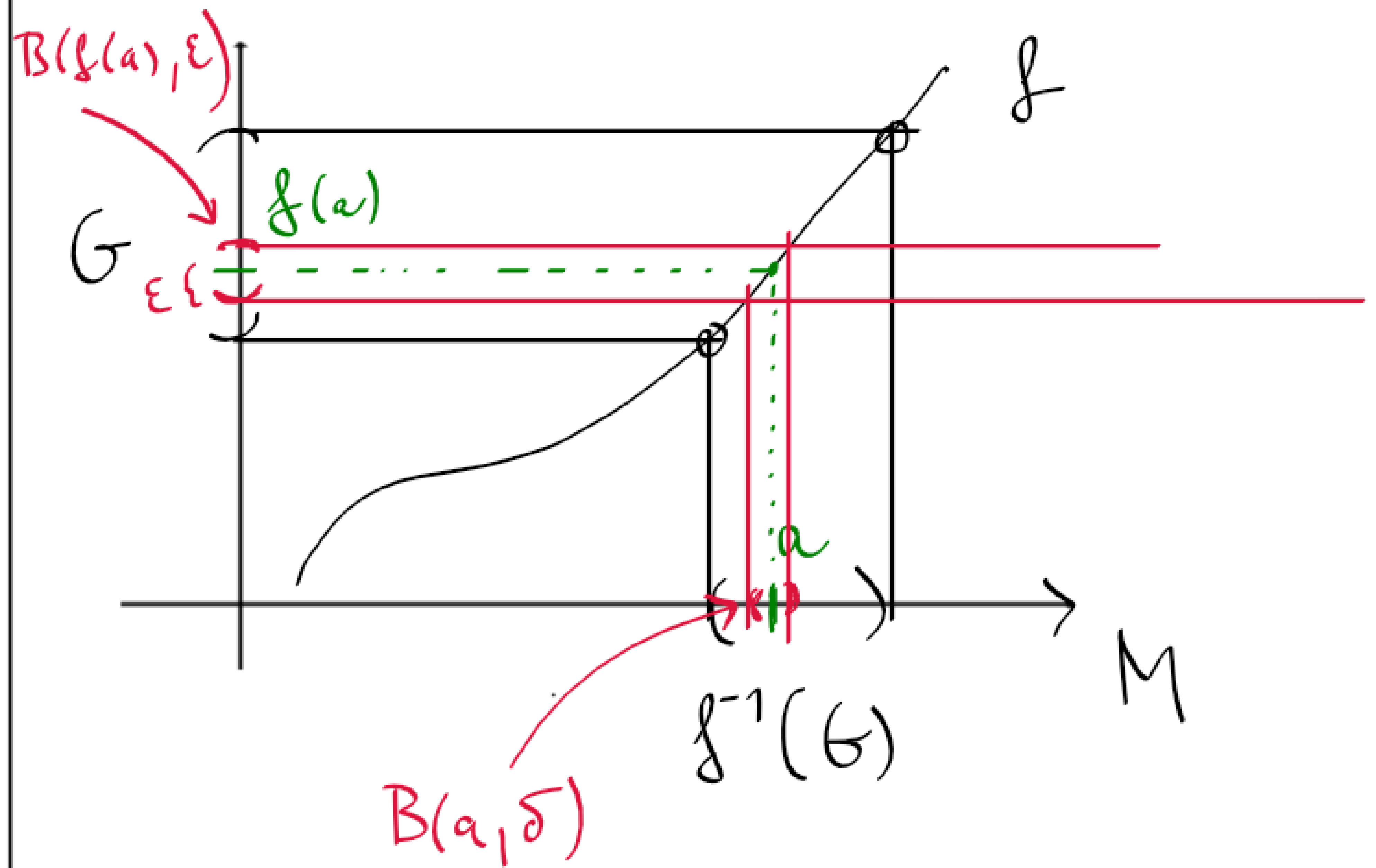
Zvolme $a \in f^{-1}(G)$ lib. <u>Chceme</u>: $a \in (f^{-1}(G))^0$.

$f(a) \in G$ (podle def. vzoru). Ale G je ot.,

takže $\exists \varepsilon > 0: B(f(a), \varepsilon) \subseteq G$. Podle definice

spojitosti funkce f v bodě a: pro toto ε

$\exists \delta > 0 \; \forall x \in B(a, \delta): f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$.



Tedy $f(B(a,\delta)) \subseteq B(f(a), \varepsilon) \subseteq G$

$B(a,\delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a),\varepsilon)) \subseteq f^{-1}(G)$

Tedy a je vnitřní bod $f^{-1}(G)$, a jsme hotovi.

$(ii) \Rightarrow (i)$: nechť platí (ii), tj.

$\forall G \subseteq \mathbb{R}$ ot. : $f^{-1}(G)$ je ot.

Chceme dokázat (i), tj. spojitost f na M.

Nechť $a \in M$ libovolný bod.

Chceme: f je spojitá v bodě a.

Buďiž dáno $\varepsilon > 0$. Chceme δ…

Položme $G := B(f(a), \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$ (ot.).

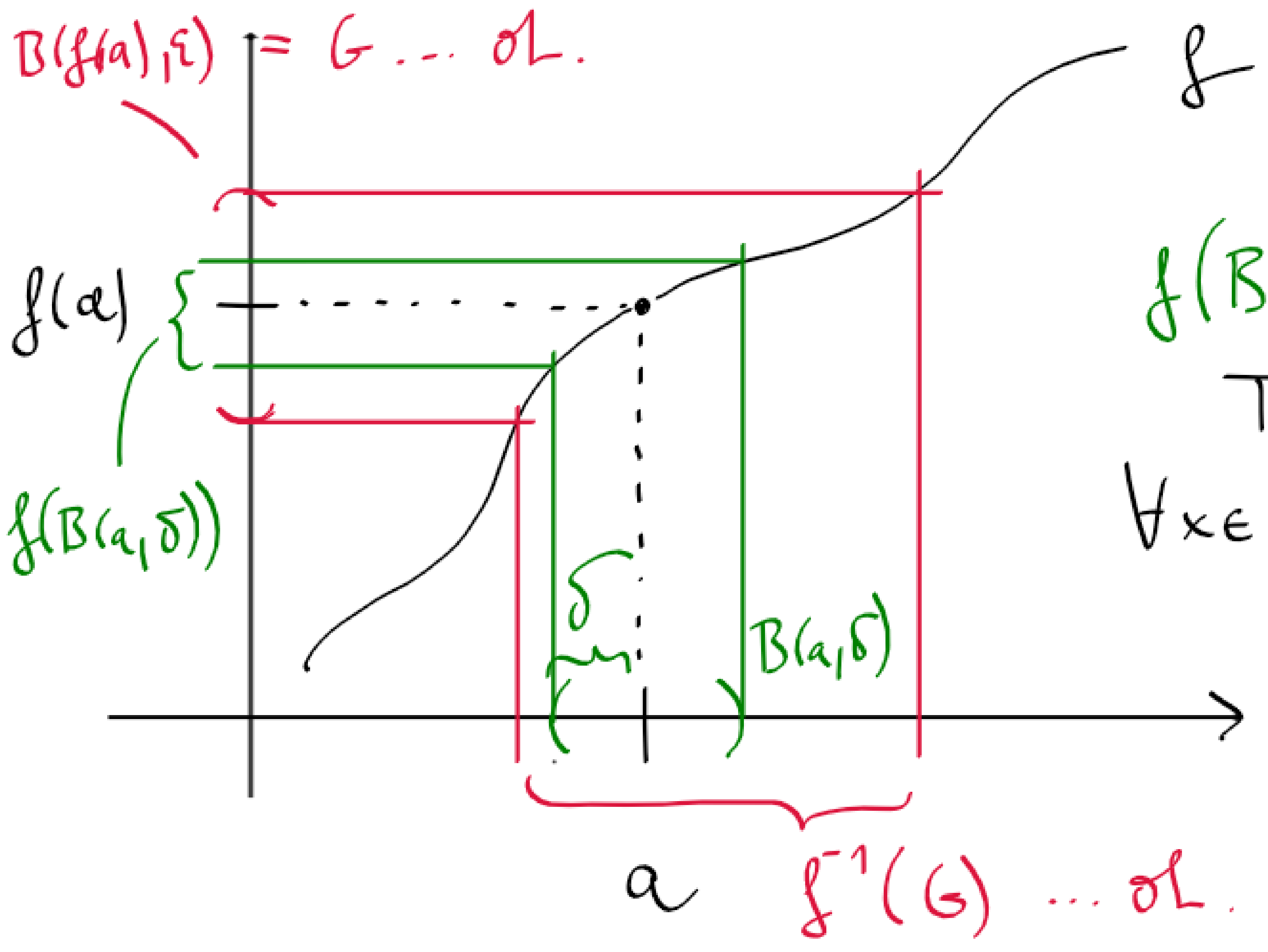
Podle předpokladu $f^{-1}(G)$ je otevřená.

$$a \in f^{-1}(G) = f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)).$$

Z otevřenosti $f^{-1}(G)$ $\exists \delta > 0$: $B(a,\delta) \subseteq f^{-1}(G)$.

Tj. $f(B(a,\delta)) \subseteq G = B(f(a), \varepsilon)$.

Jinými symboly: $\forall x \in B(a,\delta) : f(x) \in B(f(a),\varepsilon)$. ⊠



$f(B(a,\delta)) \subseteq B(f(a),\varepsilon)$

Tj. $\forall x \in B(a,\delta) : f(x) \in B(f(a),\varepsilon)$.

$(iii) \Leftrightarrow (ii)$: Obecně platí

$$f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c.$$

(Zatímco neplatí $f(A^c) = f(A)^c$: Cv.)

(Dále $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, $\cup$ $\cup$ i rozdíl.

Cv. Co platí a co neplatí pro obrazy.

Nechť platí (ii), tj. $\forall G \subseteq \mathbb{R}$ ot.: $f^{-1}(G)$ ot.

Chceme dok. (iii), tj. $\forall F \subseteq \mathbb{R}$ uz.: $f^{-1}(F)$ uz.

Nechť $F \subseteq \mathbb{R}$ uzavřená.

$$\left(f^{-1}(F)\right)^c = \underbrace{f^{-1}(\underbrace{F^c}_{\text{ot.}})}_{\text{(ii)} \Rightarrow \text{ je ot.}} \quad \text{je ot.},$$

a tedy $f^{-1}(F)$ je uzavřená.

Analogicky se dokáže (iii) $\Rightarrow$ (ii). $\boxtimes$

Def.: $A \subseteq M$ ((M,ρ) MP) je omezená, pokud se vejde do nějaké koule.

V: $K \subseteq M$ je komp. $\Longleftrightarrow$ K je uz. & omez.

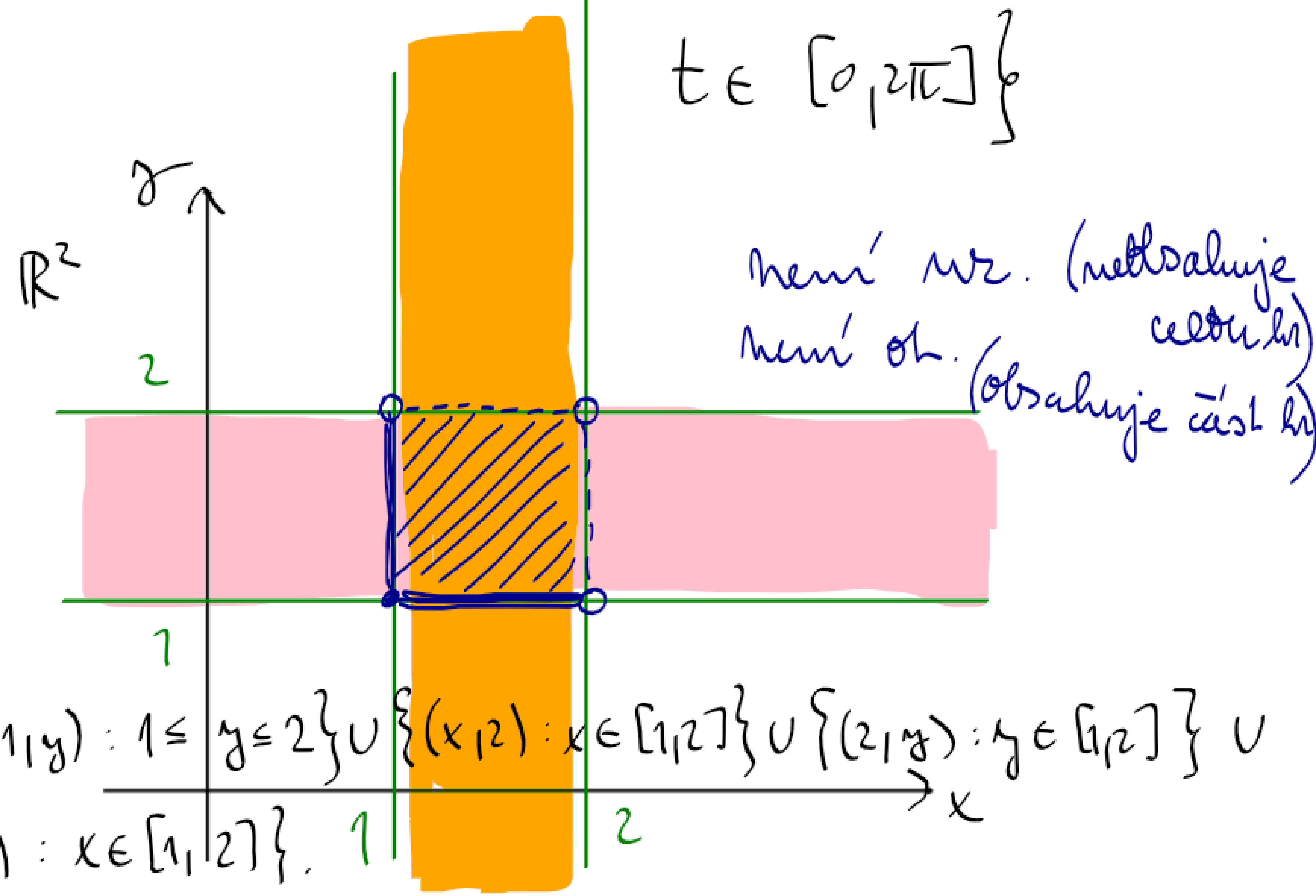
Příklad: • $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x < 2 \ \wedge\ 1 \le y < 2\}$

uz., ot., om., komp., hranice = ?

• $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left|\frac{y-1}{x}\right| \le 1\}$

• $\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \in \mathbb{R}^2 : n, m \in \mathbb{N}\}$

• $\{(3\cos t + \cos 3t,\ 3\sin t - \sin 3t) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, 2\pi]\}$



$H(A) = \{(1,y) : 1 \le y \le 2\} \cup \{(x,2) : x \in [1,2]\} \cup \{(2,y) : y \in [1,2]\} \cup$
$\cup \{(x,1) : x \in [1,2]\}$.

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \left| \frac{y-1}{x} \right| \le 1 \right\}$$

$$\left| \frac{y-1}{x} \right| \le 1 \iff \frac{|y-1|}{|x|} \le 1 \qquad / \cdot |x| \ge 0$$

$$\iff |y-1| \le |x| \quad \wedge \quad x \ne 0$$

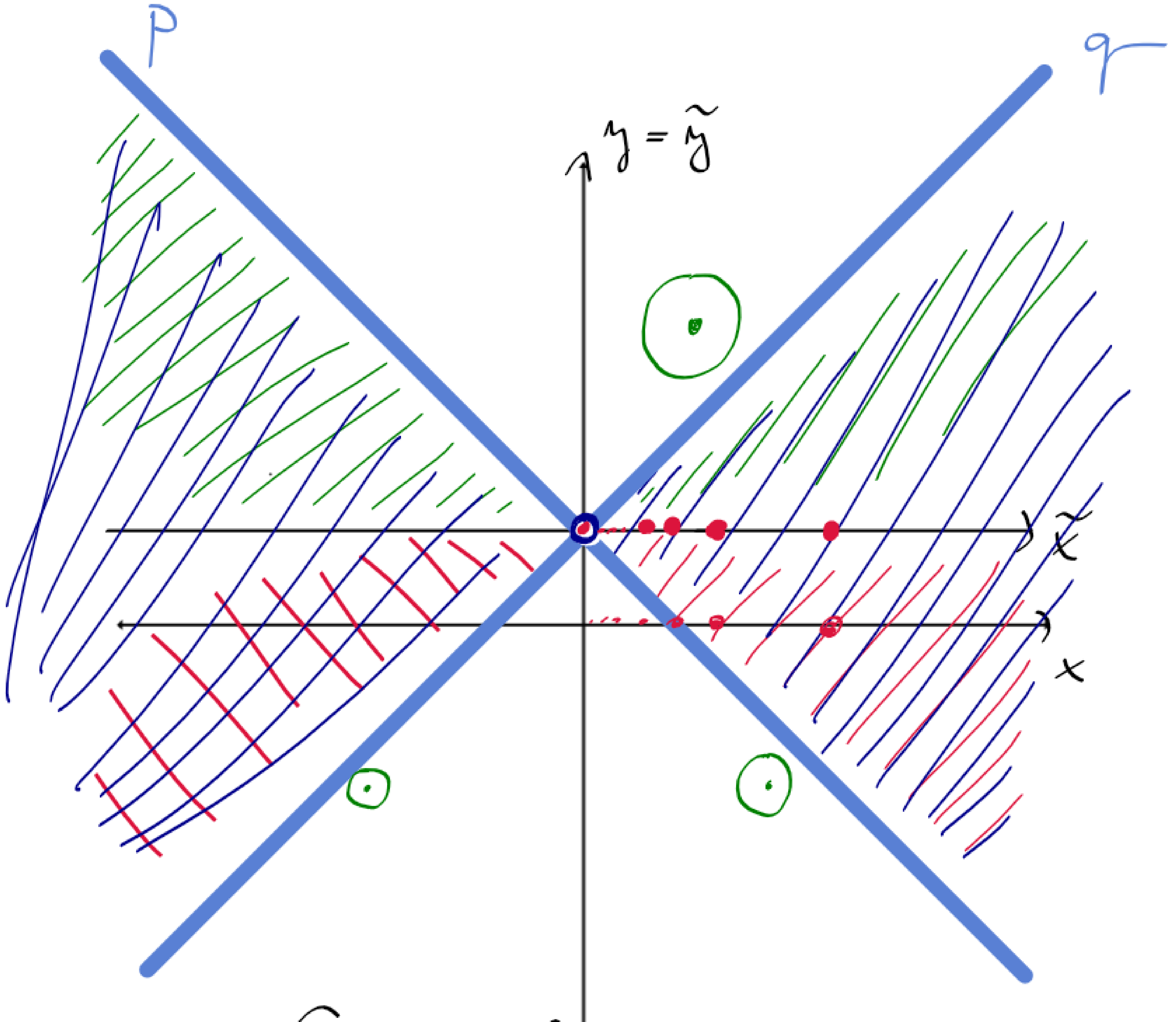
$\tilde{y} = y-1$, $\tilde{x} = x$

$$\iff |\tilde{y}| \le |\tilde{x}| \quad \wedge \quad x \ne 0$$

$H(A) = p \cup q$

ale $(0,1) \in H(A) \setminus A$. Tedy $H(A) \not\subseteq A$, a A není uz.

Ovšem obsahuje některé své hr. body (všechny až na jeden), a tedy není ot. (P40).

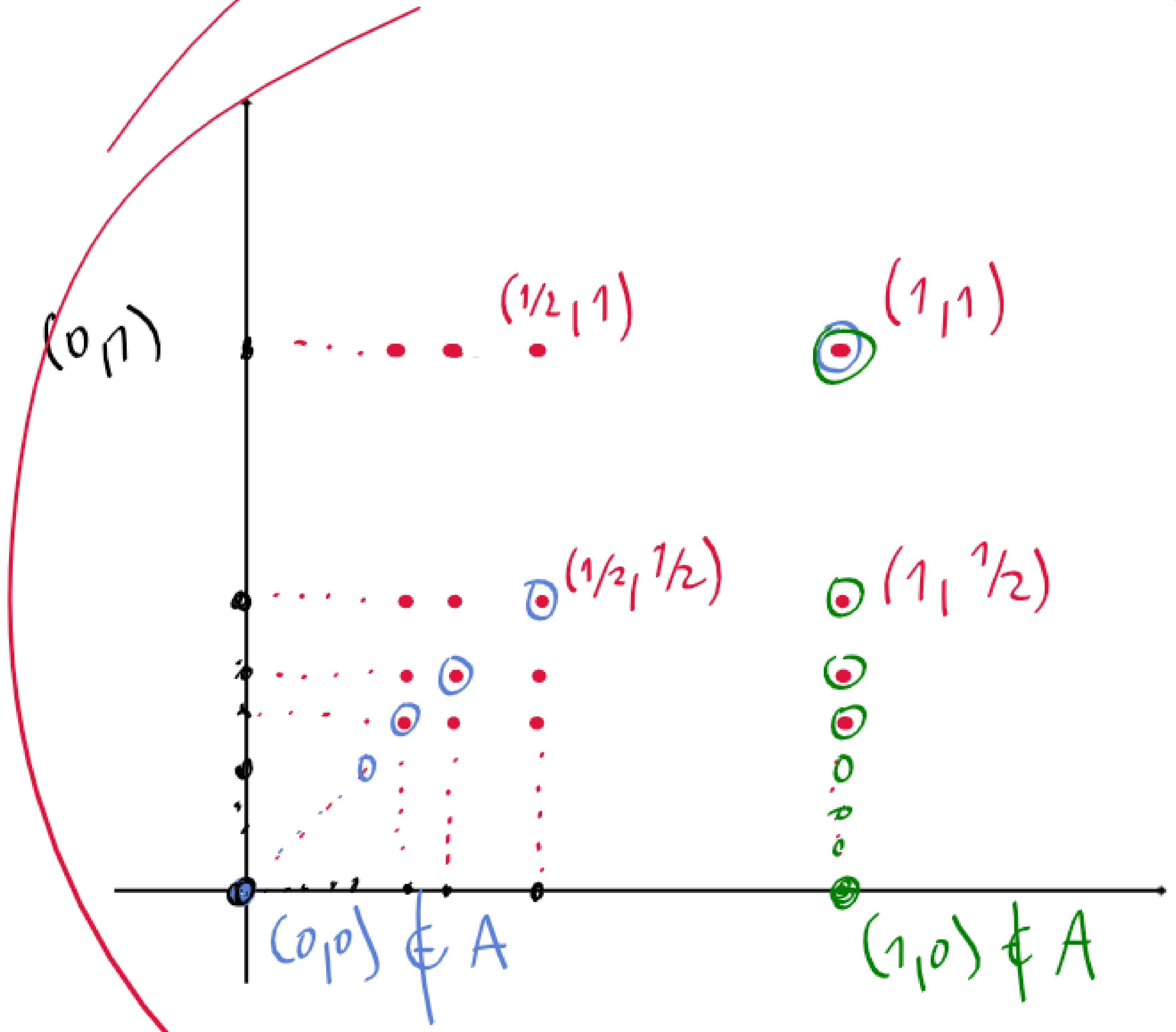


Posloupnost $\left\{ \left(\frac{1}{n}, 1 \right) \right\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ a

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n}, 1 \right) = (0,1) \notin A.$$

Tedy lze vykonvergovat, a A není uz.

$\{(1/n, 1/m) \in \mathbb{R}^2 : n, m \in \mathbb{N}\} = A$



$\lim_{n\to\infty} \underbrace{(1/n, 1/n)}_{\in A} = (0,0) \notin A$

Stejně $\lim (1, \frac{1}{m}) = (1,0) \notin A$

Lze vykonvergovat, a tedy není uz. není ani ot., neboť žádný její bod není vnitřní.

(Diskrétní množina A:

$\forall a \in A$: a je izolovaný bod A,

tj. $\exists \varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) = \{a\}$.)

Je omezená.

$H(A) = \{(0, \frac{1}{m}) : m \in \mathbb{N}\} \cup$

$\cup \{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,0)\}$.